円周率はどのようにして求められたのか？

中３-D-11 川 崎　陽 香

目次

はじめに

円周率について調べようと考えた経緯は、小学生の時、円周率を求める算数の授業があって円周率を求めてみた際に円周率は約 3.14 であるという結果になり、どのように求めれば、3.14159265358979323846…というような数値になるのか気になったからである。その際に用いた円周率を求めた方法の手順は

① 円を何本もの直径に沿って切る
② それを平行四辺形のように並べる
③ 平行四辺形の面積から円周率を求める

というものである。私は、課題研究でこの計算方法による結果よりも現在の円周率に近くづくにはどのような計算をしたらいいかをいろんな計算方法で試行錯誤して考えた。

第1章　円周率について

第1節　円周率とは

円周率とは円という図形の周の長さと直径の比率のことである。英語では“the ratio of the circumference of a circle to its diameter”(ある円の周の直径に対する比率)という。しかし、その単語はとても長いため number pi(π)と縮めて表現されている。1706 年にイギリスの数学者ウィリアムジョーンズが使用し、18 世紀にオイラーというスイスの数学者が記号「π」を採用したことがきっかけで全世界で使用されている。πというのはギリシャ語で周囲という意味の『Περιφέρεια(perimeter)』から由来している。それ以前は(π/δ) π=円周　δ=直径という比率で表されていた。

第2節　円周率の歴史

どんな円でも、その直径に対する円周の割合、つまり円周率は一定で、その値が 3 より少し大きいことは古くから知られていた。古代メソポタミアでは 3.125、古代エジプトでは 3.16……という円周率が使われていた記録が残っている。

(ⅰ)アルキメデス

アルキメデスは古代ギリシャの数学者、物理学者、技術者である。彼は円に内接する正六角形と円、円に外接する正六角形の周の長さを比べる不等式から $3<\pi<2\sqrt{3}$ が確立し、円周率は“およそ 3 だが、3 より少し大きい値”だということを導き出した。

また、正 96 角形を利用して円周率の値が　$3+\frac{10}{71}=3.1408\ldots$ より大きく、$3+\frac{1}{7}=3.1428\ldots$ より小さいことを発見した。つまり、アルキメデスは円周率の値を小数第 2 位まで正しく求めていたことになる。

(ⅱ)祖沖之

祖沖之は中国の数学者。正二四五七六角形から $3.1415296<\pi<3.1415297$ を求めた。また、円周率に近い分数が$\frac{355}{113}$であることも求めた。昔から円周率となる分数がいろいろと考えら

れてきたが、円周率の値にぴったりと一致する分数がないということが分かったのは 200 数十年前のことである。

(ⅲ)和算

『塵劫記』や『古今算法記』は、π=3.16 を用いたが、17 世紀の後半に松村茂清によって、円周率が小数点 21 桁まで計算された。しかも、その円周率は小数点 7 桁までは現在の円周率と一致した。また、九州藩主でありながら、数学者だった有馬頼僮な著書で円周率 29 桁を正しく表す分数$\frac{428224593349304}{136308121570117}$を公表した。また、松永良弼は円周率を 53 桁まで求めた。それは 51 桁までは正しかった。さらに、松永良弼はπそのものを表す展開式を見つけた。2Arcsin$\frac{1}{2}$であった。

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1^2}{6} + \frac{(1・3)^2}{1920} + \frac{(1・3・5)^2}{322560} + \cdots$$

第 3 節　近年の円周率

　現在円周率はコンピュータを利用して計算されている。計算式がπに関する数になる式を計算することで、円周率を計算している。現在、円周率は Google が 2022 年 6 月 9 日に発表した 100 兆桁まで求められている。Google はチュドノフスキー級数という計算を用いて計算した。チュドノフスキー級数とは項の総和を順に計算するのではなく、トーナメント方式で足し合わせて計算する方法。足す順序の変更に加え、除算の回数を減らす工夫がされているため、計算時間が短くなる。チュドノフスキーの公式は 14 桁ごとに正確な値を導くことができる。

チュドノフスキーの公式

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!\,k!^3\, 640320^{3k+\frac{3}{2}}}$$

グレゴリー・ライプニッツ級数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots$$

この式は積分で証明することができる。

マチンの公式

$$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{299}$$

第2章　自分で円周率を求める

　円周率を複数の方法で求めてみる。その結果、自分で求めた円周率が現在の円周率になるのかどうかを調べていく。

第1節　円周率の範囲

　まず、円周率を自分で求めていくうえで、円周率の範囲を計算で証明する。「円周率が 3＜π＜4 の範囲に存在する」ことの証明をする。

<u>円周率が 3 より大きくなることの証明</u>

（証明）

正六角形と半径 3cm の円の周の長さを比べることとする。正六角形の周の長さは 9cm である。円周率が 3 であった場合、円周は 9cm となる。それでは、この円に内接する正六角形の周の長さと全く同じになることになる。つまり、それは正六角形が円に内接することと矛盾する。したがって、円周率は 3 より大きい。…①

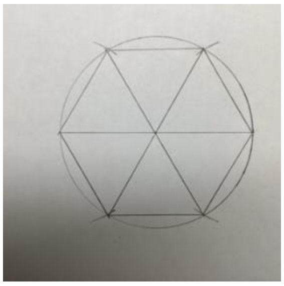


図:半径 3cm の円

<u>正方形に円が内接する場合、円周率は 4 より小さくなることの証明</u>

（証明）

正方形と正方形に内接する円の面積を比べることとする。下図は半径 2cm、直径 4cm の円と一辺 4cm の正方形である。正方形の面積は 16 ㎠となる。仮に、円周率が 4 であった場合、円の面積も 16 ㎠となる。下図より、円の面積は正方形の面積より明らかに小さいことがわかる。円周率が 4 だと、円の面積は正方形の面積 16 ㎠の小さいはずなのに円の面積が 16 ㎠

になってしまい、円の面積と正方形の面積が同じになってしまう。つまり、円が正方形に内接することと矛盾する。したがって、円周率は 4 より小さい。…②

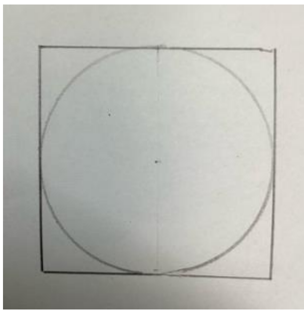


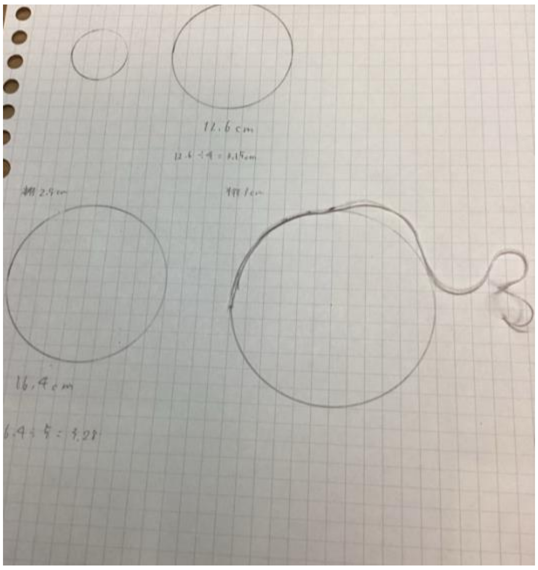
図:4cm の正方形に内接する 4cm の円

したがって、①,②より、円周率は 3＜π＜4 となる。

第 2 節　　円周から円周率を求める（糸）

計算手順

① 円周を糸で囲う
② その糸の長さが円周であるため、それを測って円周率を求める。(円周率は、円周÷直径の式で求めるものとする。)



計算結果

円の半径(cm)	円周(cm)	円周率

2	12.6	3.15
2.5	16.4	3.28
3	18.4	3.0666
1.55	10.1	3.258
2.2	14.1	3.2045
2.75	17.4	3.1636
3.2	20.3	3.1718
3.25	21.2	3.2615
3.8	24.1	3.171
3.9	24.8	3.1794

考察

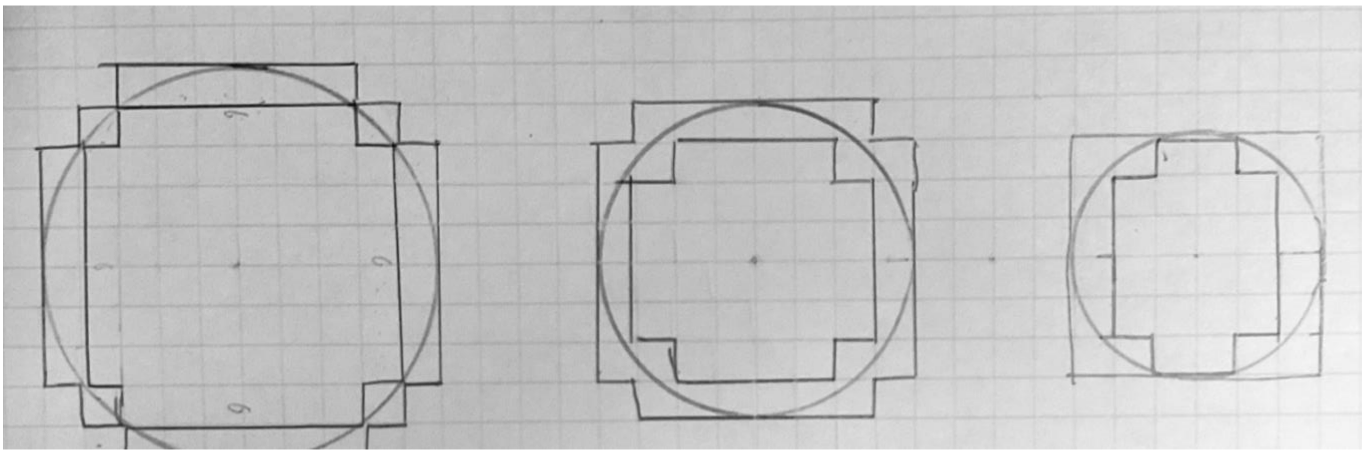
円周率にとても誤差が出てしまったため結果にばらつきが出てしまった。最も現在の円周率に近いのは半径 2cm で円周が 12.6cm の時の円周率の 3.15 であった。自分で測ると正確性に欠けていると感じた。

第 3 節　円周から円周率を求める（面積）

計算手順

① 5mm 方眼の紙に何種類かの大きさの円を描く。

② 円の内側と円の外側にそって線をひく。（円と線は、基本的に交わらないようにする。ただし、その線と円が交わることができるのは方眼と円が接している場合のみである。）

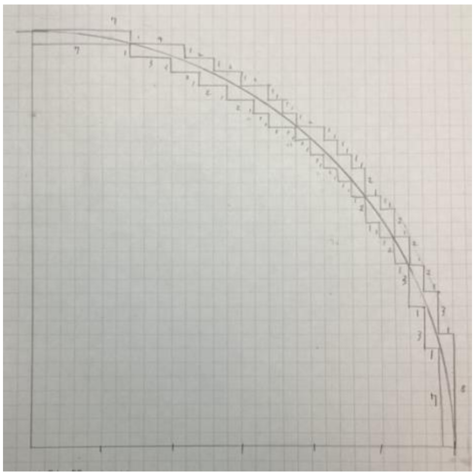


結果

円の半径(cm)	内側の線の長さ	内側の円周率	外側の線の長さ	外側の円周率
1.5	8	2.666666666…	12	4
2	12	3	16	4
2.5	16	3.2	20	4
3	20	3.333333333…	24	4
5.5	40	3.666666666…	44	4

考察
実際の円周率とは大きく離れてしまった。もっとも近い円周率は円の半径が 2cm の場合であった。

第 4 節　中心角 90°の扇形から求める
計算方法
第 3 節の円周の求め方と同様の方法を用いる。ただし、ここでは円周ではなく、中心角 90°の扇形の内側の線の長さと外側の線の長さから円周率を求める。

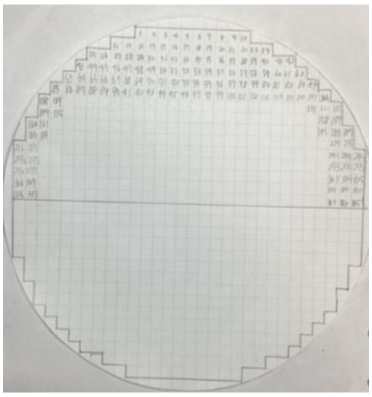


円の半径(cm)	内側の線の長さ	内側の円周率	外側の線の長さ	外側の円周率
15	29	3.866666666…	30	4

考察
円ではなく扇形から求めたことで第 3 節よりも誤差が出てしまった。第 2～4 節の円周を求めた結果から円周は自分で測ると誤差が出やすくなるため、計算で円周を求めるほうが正確だと感じた。

第 5 節　円の面積から円周率を求める
計算手順

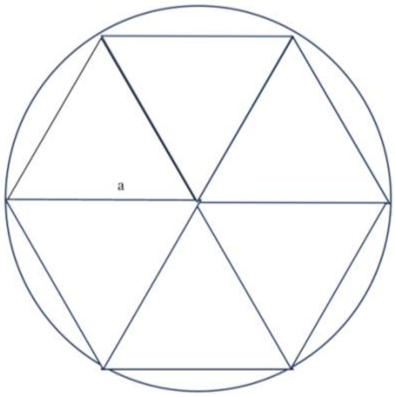
① 円を方眼紙に書く。
② 円を切って円の面積を求める。
※円の面積÷円の半径×半径から求めるものとする。
円の半径は 6cm と 7.5cm で計算するものとする。



計算結果
半径 6cm の円の面積は 116 ㎠となった。よって、円周率は 3.083333333…である。半径 7.5cm の円の面積は 201 ㎠となった。よって、円周率は 3.5733333333333333…である。

考察
これらは現在の円周率 3.14 から大きく離れてしまった。第 2 節～第 6 節より、自分で円周や円の面積を測って円周率を求める方法では誤差が正確性に欠けていると感じた。次の計算では円周を計算によって円周率を導き出したい。

第 7 節　余弦定理から円周を求める
計算内容
第 6 節の考察で述べたように、円周率を面積や円周を長さを測ったりして、求めるのは誤差が出てしまったため、より正確に求めるために円周を自分で求めることにした。今回円周率の計算に用いたのは余弦定理である。円に内接する正多角形の周の長さが最も円周に近くなると考えたからである。



図において直径を 1cm とすると半径は 0.5cm である。直径を 1cm とすることで周の長さ÷直径で円周率が求まるため、直径が 1cm であるから円周率は直径の長さと等しいことになる。

【余弦定理】$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\theta$

より、半径を b、c とすると a が三角形の底辺であるから a×辺の数が円周率ということになる。

計算結果

正 n 角形	中心角 θ	円周率
5	72	2.938962402
6	60	3
8	45	3.0615028992
9	40	3.0784736475
10	36	3.090307428
12	30	3.1061229852
15	24	3.119495151
18	20	3.125475963
20	18	3.130495168
24	15	3.1338155664
30	12	3.139267431
36	10	3.1384072404
40	9	3.136877428
45	8	3.133887363
60	6	3.146426544
72	5	3.1384072368
90	4	3.117691458
120	3	3.174901572
180	2	3.117691458

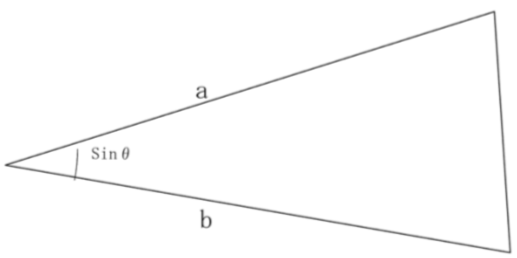
360	1	3.6

いままでの計算と比較すると、この計算がもっとも現在の円周率に近くなった。その中でもっとも現在の円周率に近くなった円周率は正 30 角形（θ=12°）の 3.13840072368 である。

第 8 節　計算から円の面積から求める
計算内容
第 5 節では円の面積を自分で測ってを円周率を求めたことによって誤差が出てしまった。円に内接する正多角形は円の面積よりは小さい値になると予想し、正多角形の面積から円周率を導き出すことにした。

面積を求めるのに用いた公式

$S=\frac{1}{2}\times a\times b\times sin\theta$



円に内接する正 n 角形の中に存在する n 個の三角形の辺の長さ a、b をそれぞれ a=1，b=1 とするとその辺の長さ a、b の長さを円の半径として考えることができる。したがって、円周率は「正多角形の面積÷円の半径×半径」となる。ここで外接円の半径が 1 であるため、正多角形の面積がそのまま円周率となる。

計算結果

正 n 角形	中心角 θ	円周率
5	72	2.37775
6	60	2.598
8	45	2.8284
9	40	2.8926
10	36	2.939
12	30	3
15	24	3.05025
18	20	3.078
20	18	3.090

24	15	3.1056
30	12	3.1185
36	10	3.1242
40	9	3.128
45	8	3.132
60	6	3.135
72	5	3.1392
90	4	3.141
120	3	3.138
180	2	3.141
360	1	3.15

ここまでの円周率を求めた方法の中で円周率が 3.141 となり、かなり正確であった第 7 節の計算結果 3.13840072368 よりもさらに現在の円周率に近づくことができた。

第3章　考察

　自分で円周率を求めると、もっとも現在の円周率に近い円周率で、円の面積に近くなるであろう図形の正多角形の面積から求めた 3.141 という結果になった。小数第 4 位までは現在の円周率と一致した。また、円周率を求めていくうえで，円の面積や周の長さを測って求め，そこから円周率を導き出すことはとても誤差が出てしまい、不正確であったと実感した。計算で求めた方がより正確な数値を求めることができると感じた。しかし、現在の円周率に数値をどんどん近づけていこうと思うと他の計算方法が必要なのだろうが、現在の自分の知識と能力ではこれが限界であったため、今後さらに数学という学問を学んで、知識や経験を積むことでもっと難しい計算方法で円周率を求めてみたい。

おわりに

　私たちが算数や数学で使っている円周率は、現在の円周率に至るまでいろいろな計算方法によっていろいろな円周率が求められていたことが分かった。また、近年では日々円周率の桁数が増えていることも分かった。

参考文献

『数学の歴史』上垣渉
『数学のかんどころ 22 円周率　歴史と数理』中村滋
『体系数学 1 幾何編』　出版社:数研出版